UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică şi Informatică
Sesiunea Iulie 2022
Soluţii şi barem de corectare la Matematică

Subiectul. 1 *Pentru $t \in \mathbb{R}$ considerăm matricele*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t & -\sin t \\ -\sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t \\ \sin t & 1-\cos t \end{pmatrix}.$$

i) Calculaţi $A(t)B(t)$, $B(t)A(t)$ şi determinaţi mulţimea $M = \{t \in \mathbb{R} : A(t)$ este inversabilă $\}$;

ii) Calculaţi $\det\Big(A(t)^3 + B(t)^3\Big)$;

iii) Arătaţi că există şi determinaţi $r \in \mathbb{R}$ astel încât $A(t)^{2022} = r^{2021}A(t)$ şi $B(t)^{2022} = r^{2021}B(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Barem: Start .... (**1p**)

i) Prin calcul direct se obţine că $A(t)B(t) = B(t)A(t) = O_2$, ... (**1p**)

Matricea $A(t)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A(t) \neq 0$. Cum însă $\det A(t) = 1-\cos^2 t-\sin^2 t = 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ rezultă că $M = \emptyset$. .... (**2p**)

ii) Deoarece $A(t)B(t) = B(t)A(t) = O_2$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, rezultă că

$$A(t)^3 + B(t)^3 = \big(A(t) + B(t)\big)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Atunci $\det\Big(A(t)^3 + B(t)^3\Big) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64$. .... (**2p**)

iii) Avem că $A(t)^2 = 2A(t)$ şi $B(t)^2 = 2B(t)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. .... (**2p**)

Prin inducţie matematică se arată că $A(t)^n = 2^{n-1}A(t)$ şi $B(t)^n = 2^{n-1}B(t)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. .... (**1p**)

Se deduce că $A(t)^{2022} = 2^{2021}A(t)$ şi $B(t)^{2022} = 2^{2021}B(t)$, $t \in \mathbb{R}$. .... (**1p**)

Subiectul. 2 *Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie asociativă*

$$x \star y = xy - 5x - 5y + 30, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Calculaţi $2022 \star 5$;

ii) Arătaţi că mulţimea $M = [5, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de legea "$\star$";

iii) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{2022\ ori} = 6$.

Barem: Start .... (**1p**)

i) Se obţine $2022 \star 5 = 5$ .... (**2p**)

ii) Se consideră $x, y \in M$. Se rescrie legea sub forma $x \star y = (x-5)(y-5) + 5$ .... (**1p**)

Se demonstrează că $x \star y \in M$, adică $x \star y \geq 5$. .... (**2p**)

iii) Se deduce forma $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{n \text{ ori}} = (x-5)^n + 5$ ...... (**1p**)

Se demonstrează folosind inducţia matematică relaţia de mai sus. ...... (**2p**)

Se obţin soluţiile $x = 4$ şi $x = 6$ ...... (**1p**)

Subiectul. 3 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = e^x - e \cdot x$*.*

i) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$*;*

ii) Determinaţi imaginea funcţiei f*;*

iii) Arătaţi că $e^{x^2-1} + e^{x-1} \geq x^2 + x$*, pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*.*

Barem: Start ...... (**1p**)

i)Se observă că $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$, iar $f'(x) = e^x - e$ ...... (**1p**)

Limita este deci 0 ...... (**1p**)

ii) Studiază semnul derivatei funcţiei f pe mulţimea numerelor reale ...... (**1p**)

Cum f este descrescătoare dacă $x < 1$ şi f este crescătoare dacă $x > 1$, se obţine că $x = 1$ este punct de minim, iar $f(1) = 0$. ...... (**1p**)

Din calcul $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ...... (**1p**)

Se obţine imaginea funcţiei f: $Im(f) = [0, \infty)$ ...... (**1p**)

iii) Inegalitatea din enunţ se scrie sub forma: $e^{x^2} + e^x \geq e \cdot x^2 + e \cdot x$ ...... (**1p**)

Se observă că inegalitatea devine $f(x^2) + f(x) \geq 0$ ...... (**1p**)

Deoarece imaginea funcţiei f este $[0, \infty)$, inegalitatea este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ ...... (**1p**)

Subiectul. 4 *Pentru* $n \in \mathbb{N}$ *notăm* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4x^2 + 1} dx$*.*

i) Calculaţi I_0 *şi* I_1*;*

ii) Să se arate că $4I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$*.*

iii) Studiaţi convergenţa şirului $(nI_n)_{n \geq 0}$ *şi calculaţi limita acestuia.*

Barem: Start ...... (**1p**)

i) Calculează $I_0 = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg}(2)$ şi $I_1 = \dfrac{1}{8} \ln(5)$ ...... (**2p**)

ii) Se obţine:

$$4I_{n+2} + I_n = 4 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{4x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^n(4x^2+1)}{4x^2+1} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$ ...... (**3p**)

iii) Conform formulei de integrare prin părţi se obţine:

$$nI_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{4x^2+1} dx = \int_0^1 (x^n)' \frac{x}{4x^2+1} dx = \frac{1}{5} + J_n,\ n \in \mathbb{N},$$

unde $J_n = \int\limits_0^1 x^n \dfrac{4x^2-1}{(4x^2+1)^2} dx$. .... (**2p**)

Deoarece $0 \leq x^n \dfrac{|4x^2-1|}{(4x^2+1)^2} \leq 3x^n$, pentru orice $x \in [0,\, 1]$ şi $n \in \mathbb{N}$, conform proprietăţii de monotonie a integralei Riemann, avem:

$$0 \leq \int\limits_0^1 x^n \frac{|4x^2-1|}{(4x^2+1)^2} dx \leq \int\limits_0^1 3x^n dx = \frac{3}{n+1}.$$

Rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$ şi deci există $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{1}{5}$. În particular, rezultă şi că şirul $(nI_n)_{n\geq 0}$ este convergent .... (**2p**)

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.