Examen de admitere
Facultatea de Matematică şi Informatică
Proba scrisă – **Matematică**
15 iulie 2023
Versiunea 1

1. [5 puncte] Dacă şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică, iar $a_{1012} = \frac{1}{7}$, atunci suma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2023}$ este egală cu
   A. 2023
   B. 289
   C. 1321
   D. 0
   E. 2024
   F. 17.

Soluţie: Dacă r este raţia progresiei aritmetice avem că $S = \frac{a_1 + a_{2023}}{2} \cdot 2023 = \frac{a_1 + a_1 + 2022r}{2} \cdot 2023 = (a_1 + 1011r)2023 = a_{1012} \cdot 2023 = \frac{2023}{7} = 289$.

2. [3 puncte] Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x \circ y = 3xy - 6x - 6y + 14$, $x, y \in \mathbb{R}$. Elementul neutru, $e \in \mathbb{R}$, al legii de compoziţie ”$\circ$” este
   A. $e = -2$
   B. $e = 3$
   C. $e = 0$
   D. $e = \frac{7}{3}$
   E. $e = 1$
   F. $e = 8$

Soluţie: Avem că $e \circ x = x \circ e = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dacă şi numai dacă $(x-2)(3e-7) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Se deduce că $e = \frac{7}{3}$.

3. [4 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + 2ax + 2 & , \quad x \leq 1 \\ 2x + b & , \quad x > 1 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$. Numărul a^b este egal cu

A. 64

B. 1

C. 81

D. $\frac{1}{81}$

E. -7

F. $-\frac{1}{64}$

Soluţie: Impunând condiţia de continuitate în $x_0 = 1$ se deduce că $7 + 2a = b + 2$. În acest caz avem că există derivatele laterale $f'_s(1) = 2a + 10$, iar $f'_d(1) = 2$. Funcţia f va fi derivabilă în $x_0 = 1$ (deci şi pe $\mathbb{R}$) dacă $2a + 10 = 2$. Se deduce că $a = -4$ şi $b = -3$. Atunci $a^b = -\frac{1}{64}$.

4. [4 puncte] Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\log_2(x^2 - 3x + 2) = \log_2(x^2 - 4x + 3) + 2$ este

A. $\{1, \frac{10}{3}\}$

B. $\{-\frac{10}{3}\}$

C. $\{\frac{10}{3}\}$

D. $\{10\}$

E. $\emptyset$

F. $\{1, 10\}$

Soluţie: În condiţiile de existenţă ($x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$) ecuaţia este echivalentă cu

$$\log_2 \frac{x-2}{x-3} = \log_2 4,$$

ceea ce conduce la $x = \frac{10}{3}$.

5. [5 puncte] Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $p = X^3 - aX^2 + 4X - b \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $x_1 = 1 - i \in \mathbb{C}$ este rădăcină a polinomului p, atunci $a + b + a \cdot b$ este egal cu

A. 12

B. 11

C. 0

D. 13

E. -11

F. 14

Soluţie: Avem $x_1^2 = -2i$, $x_1^3 = (1 - i)(-2i) = -2 - 2i$. Deoarece $0 = p(x_1) = (-2 - 2i) - a(-2i) + 4(1 - i) - b = (-2 + 4 - b) + (-2 + 2a - 4)i$ rezultă $a = 3, b = 2$, deci $a + b + ab = 11$.

6. [5 puncte] Fie $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2\sin x + 4\cos x)e^{-x}$, $F(x) = (a\sin x + b\cos x)e^{-x}$. Perechea (a, b) pentru care funcţia F este o primitivă a funcţiei f este

A. $(2, 1)$

B. $(2, 4)$

C. $(1, 1)$

D. $(1, 0)$

E. $(1, -3)$

F. $(-1, 2)$

Soluţie: Funcţia F este derivabilă şi $F'(x) = \big((a-b)\cos x - (a+b)\sin x\big)e^{-x}$. Rezultă că funcţia F va fi o primitivă a funcţiei f dacă şi numai dacă $\begin{cases} a-b &= 4 \\ a+b &= -2, \end{cases}$ sistem cu soluţia $(1, -3)$.

7. [4 puncte] Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$. Dacă $M = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \operatorname{rang}(A) = 2\}$, atunci

A. $M = \{-3\}$

B. $M = \{-1\}$

C. $M = \{1\}$

D. $M = \{3\}$

E. $M = \{2\}$

F. $M = \emptyset$

Soluţie: Pentru orice valoare a lui $\alpha \in \mathbb{R}$, matricea dată are minorul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 36 \neq 0,$$

deci A are rangul egal cu 3. Rezultă $M = \emptyset$.

8. [5 puncte] Fie $A = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{3} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{13})$. Atunci matricea A^{13} este egală cu

A. A

B. $\widehat{6}A$

C. I_2

D. $\widehat{2}I_2$

E. $\widehat{3}I_2$

F. $\widehat{3}A$

Soluţie: Prin inducţie după n se arată că

$$A^n = \begin{pmatrix} \widehat{2^n} & \widehat{3n \cdot 2^{n-1}} \\ \widehat{0} & \widehat{2^n} \end{pmatrix}, \ \forall n \geq 1.$$

Din teorema lui Fermat sau prin calcul direct se obţine $\widehat{2^{13}} = \widehat{2}$. Rezultă că $A^{13} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix} = \widehat{2}I_2$.

Soluţie alternativă. Scriind A sub forma $A = \widehat{2}I_2 + \widehat{3}B$, unde $B = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$, utilizând binomul lui Newton şi faptul că $13 \mid C_{13}^k$ pentru orice $k \in \{1, ..., 12\}$ (sau echivalent, $\widehat{C_{13}^k} = \widehat{0},\ \forall k \in \{1, ..., 12\}$) obţinem

$$A^{13} = (\widehat{2}I_2 + \widehat{3}B)^{13} = \widehat{2}^{13} I_2^{13} + \widehat{3}^{13} B^{13}.$$

Cum $\widehat{2}^{13} = \widehat{2}$, $I_2^{13} = I_2$ şi $B^2 = O_2$, relaţia anterioară devine $A^{13} = \widehat{2}I_2$, deci răspunsul corect este D.

9. [5 puncte] Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

A. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ nu există.

D. $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \infty$

E. $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

F. $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$ nu există.

Soluţie: Deoarece

$$\frac{1}{2} \cdot x^n \leq \frac{1}{x+1} \cdot x^n \leq 1 \cdot x^n,\ \forall x \in [0, 1],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

se obţine prin integrare pe $[0, 1]$ că

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

iar din teorema cleştelui rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$; deci răspunsurile A, B, C sunt false. Avem, de asemenea,

$$(n+1)I_n = \int\limits_0^1 (x^{n+1})' \frac{1}{x+1}\, dx = \left.\frac{x^{n+1}}{x+1}\right|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}\, dx = \frac{1}{2} + \int\limits_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}\, dx.$$

Ca mai sus se arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}\, dx = 0$, de unde obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$. Rezultă că răspunsul E este adevărat, iar D şi F sunt false.

10. [4 puncte] Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4x + 5 = 0$. Valoarea expresiei $x_1^3 + x_2^3$ este

A. 0

B. 1

C. 4

D. -4

E. $4i$

F. 2

Soluţie: Din relaţiile lui Viète avem $x_1 + x_2 = 4$ şi $x_1 x_2 = 5$. Rezultă

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = 4 \cdot (4^2 - 3 \cdot 5) = 4.$$

11. [5 puncte] Perimetrul unui pătrat care are unul dintre vârfuri în punctul $A(-5, -4)$ şi ca dreaptă suport a uneia dintre diagonale dreapta de ecuaţie $x - y = 1$ este egal cu

A. 4

B. $4\sqrt{2}$

C. 8

D. $2\sqrt{2}$

E. $8\sqrt{2}$

F. 2

Soluţie: Dacă notăm cu l lungimea laturii pătratului, atunci distanţa de la un vârf al acestuia la diagonala căreia nu îi aparţine este $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$. Dar această distanţă este

$$\text{dist}(A(-5, -4), d:\ x - y - 1 = 0) = \frac{|(-5) - (-4) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

de unde rezultă $l = 2$. Perimetrul pătratului este $4l = 8$.

12. [5 puncte] Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $x \cdot 2^x = 1$ este

A. 2

B. 3

C. 1

D. 4

E. 0

F. 5

Soluţie: Orice soluţie a ecuaţiei este pozitivă. Funcţiile x şi 2^x sunt pozitive şi strict crescătoare pe $(0, \infty)$, deci funcţia produs $x \cdot 2^x$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Rezultă că ecuaţia din enunţ are cel mult o soluţie. Pentru funcţia continuă $f(x) = x \cdot 2^x - 1$ observăm că $f(0) = -1 < 0$ şi $f(1) = 1 > 0$. Deci ecuaţia are exact o soluţie, situată în intervalul $(0, 1)$.

13. [3 puncte] Valoarea limitei $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ este

A. $+\infty$

B. $\frac{1}{3}$

C. 0

D. $-\frac{1}{3}$

E. 1

F. $\frac{1}{6}$

Soluţie: Deoarece funcţia $1 - \cos x$ este mărginită, iar $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, rezultă că limita din enunţ este 0.

14. [4 puncte] În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-3)$ şi $B(3,-2)$. Dreapta perpendiculară pe dreapta AB care trece prin punctul $C(5,0)$ are ecuaţia

A. $y = x - 1$

B. $y = x + 1$

C. $y = -x - 5$

D. $y = x + 5$

E. $y = -x + 5$

F. $y = -x$

Soluţie: Panta dreptei AB este $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1$. Ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este perpendiculară pe AB este $y - y_C = -\dfrac{1}{m_{AB}}(x - x_C)$, adică $y = -x + 5$.

15. [4 puncte] Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

A. $\det A = 1$

B. A este inversabilă şi $A^{-1} = A^2 - A$

C. $A^* = A^2 - A - 2I_3$

D. A este inversabilă şi $A^{-1} = A^2 - A - 2I_3$

E. $A^2 = A$

F. $A^* = A^2 - A + 2I_3$

Soluţie: Se obţine $\det A = 0$. Aşadar afirmaţiile A, B, D sunt false. Prin calcul direct se arată că afirmaţiile E şi F sunt de asemenea false, iar afirmaţia C este adevărată. Mai exact,

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. [5 puncte] Câte numere complexe z verifică egalitatea $z^2 = z + |z|$?

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

E. 6

F. 5

Soluţie: Dacă $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$, scriind egalitatea din enunţ se obţine

$$a^2 - b^2 + 2abi = a + \sqrt{a^2 + b^2} + bi.$$

Egalând părţile imaginare rezultă $b(2a - 1) = 0$. Pentru $b = 0$, din egalarea părţilor reale se obţine ecuaţia $a^2 = a + |a|$, care are soluţiile $a = 0$ şi $a = 2$. Pentru $a = \frac{1}{2}$ se obţine

$$-\frac{1}{4} = b^2 + \sqrt{\frac{1}{4} + b^2},$$

ecuaţie care nu are soluţii reale. Numerele complexe care verifică egalitatea din enunţ sunt deci $z = 0$ şi $z = 2$.

17. [5 puncte] Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin relația $f(x) = x|x| + |x - 1|, x \in \mathbb{R}$. Mulțimea punctelor în care f nu este derivabilă este

A. $\{0\}$

B. $\{1\}$

C. $\{0, 1\}$

D. $\emptyset$

E. $\mathbb{R}$

F. Niciuna dintre variantele menționate mai sus

Soluţie: Știm că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ fixat, funcția $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x - a| \in \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, dar nu este derivabilă în a. Notăm cu g și h funcțiile $\mathbb{R} \ni x \mapsto x|x| \in \mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x - 1| \in \mathbb{R}$. Cum

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

deducem că g este derivabilă și în 0, deci pe întreaga mulțime a numerelor reale. Astfel, mulțimea punctelor de derivabilitate ale lui f coincide cu mulțimea punctelor de derivabilitate ale lui h, adică cu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

18. [5 puncte] Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $27^x \leq 3^{x+4}$ este

A. $(2, \infty)$

B. $\emptyset$

C. $[3, \infty)$

D. $(-\infty, 2]$

E. $(-\infty, 3]$

F. Niciuna dintre variantele menționate mai sus

Soluţie: Inecuaţia se scrie echivalent $3^{3x} \leq 3^{x+4}$, deci $3x \leq x+4$. Mulţimea soluţiilor este $(-\infty, 2]$.

19. [5 puncte] Valoarea integralei

$$\int_0^2 |x - 1| \, dx$$

este

A. 2

B. 0

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{3}{2}$

F. 3

Soluţie:

$$\int_0^2 |x-1|\ dx = \int_0^1 (1-x)\ dx + \int_1^2 (x-1)\ dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 1.$$

20. [5 puncte] Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$. Valoarea expresiei $\sin x + \cos x$ este

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

D. 1

E. $\frac{3}{2}$

F. $\sqrt{2}$

Soluţie: Avem

$$2 = (\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} + (\sin x + \cos x)^2,$$

de unde rezultă $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{7}{4}$. Deoarece $\sin x + \cos x > 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se obţine $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$.