

Examen de admitere
Facultatea de Matematică și Informatică
Proba scrisă – **Matematică**
15 iulie 2023
Versiunea 1

1. [5 puncte] Dacă șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică, iar $a_{1012} = \frac{1}{7}$, atunci suma $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2023}$ este egală cu
- A. 2023
 - B. 289**
 - C. 1321
 - D. 0
 - E. 2024
 - F. 17.

Soluție: Dacă r este rația progresiei aritmetice avem că $S = \frac{a_1 + a_{2023}}{2} \cdot 2023 = \frac{a_1 + a_1 + 2022r}{2} \cdot 2023 = (a_1 + 1011r)2023 = a_{1012} \cdot 2023 = \frac{2023}{7} = 289$.

2. [3 puncte] Pe mulțimea \mathbb{R} definim legea de compoziție $x \circ y = 3xy - 6x - 6y + 14$, $x, y \in \mathbb{R}$. Elementul neutru, $e \in \mathbb{R}$, al legii de compoziție "o" este
- A. $e = -2$
 - B. $e = 3$
 - C. $e = 0$
 - D. $e = \frac{7}{3}$**
 - E. $e = 1$
 - F. $e = 8$

Soluție: Avem că $e \circ x = x \circ e = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $(x - 2)(3e - 7) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Se deduce că $e = \frac{7}{3}$.

3. [4 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + 2ax + 2 & , x \leq 1 \\ 2x + b & , x > 1 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie derivabilă pe \mathbb{R} . Numărul a^b este egal cu
- A. 64
- B. 1
- C. 81
- D. $\frac{1}{81}$
- E. -7
- F. $-\frac{1}{64}$**

Soluție: Impunând condiția de continuitate în $x_0 = 1$ se deduce că $7 + 2a = b + 2$. În acest caz avem că există derivatele laterale $f'_s(1) = 2a + 10$, iar $f'_d(1) = 2$. Funcția f va fi derivabilă în $x_0 = 1$ (deci și pe \mathbb{R}) dacă $2a + 10 = 2$. Se deduce că $a = -4$ și $b = -3$. Atunci $a^b = -\frac{1}{64}$.

4. [4 puncte] Mulțimea soluțiilor ecuației $\log_2(x^2 - 3x + 2) = \log_2(x^2 - 4x + 3) + 2$ este
- A. $\{1, \frac{10}{3}\}$
- B. $\{-\frac{10}{3}\}$
- C. $\{\frac{10}{3}\}$**
- D. $\{10\}$
- E. \emptyset
- F. $\{1, 10\}$

Soluție: În condițiile de existență ($x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$) ecuația este echivalentă cu

$$\log_2 \frac{x-2}{x-3} = \log_2 4,$$

ceea ce conduce la $x = \frac{10}{3}$.

5. [5 puncte] Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $p = X^3 - aX^2 + 4X - b \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $x_1 = 1 - i \in \mathbb{C}$ este rădăcina a polinomului p , atunci $a + b + a \cdot b$ este egal cu
- A. 12
- B. 11**
- C. 0
- D. 13
- E. -11
- F. 14

Soluție: Avem $x_1^2 = -2i$, $x_1^3 = (1 - i)(-2i) = -2 - 2i$. Deoarece $0 = p(x_1) = (-2 - 2i) - a(-2i) + 4(1 - i) - b = (-2 + 4 - b) + (-2 + 2a - 4)i$ rezultă $a = 3, b = 2$, deci $a + b + ab = 11$.

6. [5 puncte] Fie $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2 \sin x + 4 \cos x)e^{-x}$, $F(x) = (a \sin x + b \cos x)e^{-x}$. Perechea (a, b) pentru care funcția F este o primitivă a funcției f este
- A. $(2, 1)$
 - B. $(2, 4)$
 - C. $(1, 1)$
 - D. $(1, 0)$
 - E. $(1, -3)$**
 - F. $(-1, 2)$

Soluție: Funcția F este derivabilă și $F'(x) = ((a-b) \cos x - (a+b) \sin x)e^{-x}$. Rezultă că funcția F va fi o primitivă a funcției f dacă și numai dacă $\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = -2, \end{cases}$ sistem cu soluția $(1, -3)$.

7. [4 puncte] Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$. Dacă $M = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \text{rang}(A) = 2\}$, atunci
- A. $M = \{-3\}$
 - B. $M = \{-1\}$
 - C. $M = \{1\}$
 - D. $M = \{3\}$
 - E. $M = \{2\}$
 - F. $M = \emptyset$**

Soluție: Pentru orice valoare a lui $\alpha \in \mathbb{R}$, matricea dată are minorul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 36 \neq 0,$$

deci A are rangul egal cu 3. Rezultă $M = \emptyset$.

8. [5 puncte] Fie $A = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{3} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{13})$. Atunci matricea A^{13} este egală cu
- A. A
 - B. $\widehat{6}A$
 - C. I_2
 - D. $\widehat{2}I_2$**
 - E. $\widehat{3}I_2$
 - F. $\widehat{3}A$

Soluție: Prin inducție după n se arată că

$$A^n = \begin{pmatrix} \widehat{2}^n & \widehat{3n \cdot 2^{n-1}} \\ \widehat{0} & \widehat{2}^n \end{pmatrix}, \forall n \geq 1.$$

Din teorema lui Fermat sau prin calcul direct se obține $\widehat{2}^{13} = \widehat{2}$. Rezultă că $A^{13} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix} = \widehat{2}I_2$.

Soluție alternativă. Scriind A sub forma $A = \widehat{2}I_2 + \widehat{3}B$, unde $B = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$, utilizând binomul lui Newton și faptul că $13 \mid C_{13}^k$ pentru orice $k \in \{1, \dots, 12\}$ (sau echivalent, $\widehat{C_{13}^k} = \widehat{0}$, $\forall k \in \{1, \dots, 12\}$) obținem

$$A^{13} = (\widehat{2}I_2 + \widehat{3}B)^{13} = \widehat{2}^{13}I_2^{13} + \widehat{3}^{13}B^{13}.$$

Cum $\widehat{2}^{13} = \widehat{2}$, $I_2^{13} = I_2$ și $B^2 = O_2$, relația anterioară devine $A^{13} = \widehat{2}I_2$, deci răspunsul corect este D.

9. [5 puncte] Fie șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ nu există.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \infty$

E. $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

F. $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ nu există.

Soluție: Deoarece

$$\frac{1}{2} \cdot x^n \leq \frac{1}{x+1} \cdot x^n \leq 1 \cdot x^n, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

se obține prin integrare pe $[0, 1]$ că

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

iar din teorema cleștelui rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$; deci răspunsurile A, B, C sunt false.

Avem, de asemenea,

$$(n+1)I_n = \int_0^1 (x^{n+1})' \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^{n+1}}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} dx.$$

Ca mai sus se arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} dx = 0$, de unde obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)I_n = \frac{1}{2}$,

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$. Rezultă că răspunsul E este adevărat, iar D și F sunt false.

10. [4 puncte] Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 5 = 0$. Valoarea expresiei $x_1^3 + x_2^3$ este

A. 0

B. 1

C. 4

D. -4

E. $4i$

F. 2

Soluție: Din relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 = 4$ și $x_1 x_2 = 5$. Rezultă

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) = 4 \cdot (4^2 - 3 \cdot 5) = 4.$$

11. [5 puncte] Perimetrul unui pătrat care are unul dintre vârfuri în punctul $A(-5, -4)$ și ca dreaptă suport a uneia dintre diagonale dreapta de ecuație $x - y = 1$ este egal cu
- A. 4
 - B. $4\sqrt{2}$
 - C. 8**
 - D. $2\sqrt{2}$
 - E. $8\sqrt{2}$
 - F. 2

Soluție: Dacă notăm cu l lungimea laturii pătratului, atunci distanța de la un vârf al acestuia la diagonala căreia nu îi aparține este $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Dar această distanță este

$$\text{dist}(A(-5, -4), d: x - y - 1 = 0) = \frac{|(-5) - (-4) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

de unde rezultă $l = 2$. Perimetrul pătratului este $4l = 8$.

12. [5 puncte] Numărul soluțiilor reale ale ecuației $x \cdot 2^x = 1$ este
- A. 2
 - B. 3
 - C. 1**
 - D. 4
 - E. 0
 - F. 5

Soluție: Orice soluție a ecuației este pozitivă. Funcțiile x și 2^x sunt pozitive și strict crescătoare pe $(0, \infty)$, deci funcția produs $x \cdot 2^x$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Rezultă că ecuația din enunț are cel mult o soluție. Pentru funcția continuă $f(x) = x \cdot 2^x - 1$ observăm că $f(0) = -1 < 0$ și $f(1) = 1 > 0$. Deci ecuația are exact o soluție, situată în intervalul $(0, 1)$.

13. [3 puncte] Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ este
- A. $+\infty$
 - B. $\frac{1}{3}$
 - C. 0**
 - D. $-\frac{1}{3}$
 - E. 1
 - F. $\frac{1}{6}$

Soluție: Deoarece funcția $1 - \cos x$ este mărginită, iar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, rezultă că limita din enunț este 0.

14. [4 puncte] În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -3)$ și $B(3, -2)$. Dreapta perpendiculară pe dreapta AB care trece prin punctul $C(5, 0)$ are ecuația
- A. $y = x - 1$
 - B. $y = x + 1$
 - C. $y = -x - 5$
 - D. $y = x + 5$
 - E. $y = -x + 5$**
 - F. $y = -x$

Soluție: Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1$. Ecuația dreptei care trece prin punctul C și este perpendiculară pe AB este $y - y_C = -\frac{1}{m_{AB}}(x - x_C)$, adică $y = -x + 5$.

15. [4 puncte] Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?
- A. $\det A = 1$
 - B. A este inversabilă și $A^{-1} = A^2 - A$
 - C. $A^* = A^2 - A - 2I_3$**
 - D. A este inversabilă și $A^{-1} = A^2 - A - 2I_3$
 - E. $A^2 = A$
 - F. $A^* = A^2 - A + 2I_3$

Soluție: Se obține $\det A = 0$. Așadar afirmațiile A, B, D sunt false. Prin calcul direct se arată că afirmațiile E și F sunt de asemenea false, iar afirmația C este adevărată. Mai exact,

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. [5 puncte] Câte numere complexe z verifică egalitatea $z^2 = z + |z|$?
- A. 2**
 - B. 1
 - C. 3
 - D. 4
 - E. 6
 - F. 5

Soluție: Dacă $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, scriind egalitatea din enunț se obține

$$a^2 - b^2 + 2abi = a + \sqrt{a^2 + b^2} + bi.$$

Egalând părțile imaginare rezultă $b(2a - 1) = 0$. Pentru $b = 0$, din egalarea părților reale se obține ecuația $a^2 = a + |a|$, care are soluțiile $a = 0$ și $a = 2$. Pentru $a = \frac{1}{2}$ se obține

$$-\frac{1}{4} = b^2 + \sqrt{\frac{1}{4} + b^2},$$

ecuație care nu are soluții reale. Numerele complexe care verifică egalitatea din enunț sunt deci $z = 0$ și $z = 2$.

17. [5 puncte] Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația $f(x) = x|x| + |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Mulțimea punctelor în care f nu este derivabilă este
- A. $\{0\}$
 - B. $\{1\}$**
 - C. $\{0, 1\}$
 - D. \emptyset
 - E. \mathbb{R}
 - F. Niciuna dintre variantele menționate mai sus

Soluție: Știm că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ fixat, funcția $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x - a| \in \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, dar nu este derivabilă în a . Notăm cu g și h funcțiile $\mathbb{R} \ni x \mapsto x|x| \in \mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x - 1| \in \mathbb{R}$. Cum

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

deducem că g este derivabilă și în 0 , deci pe întreaga mulțime a numerelor reale. Astfel, mulțimea punctelor de derivabilitate ale lui f coincide cu mulțimea punctelor de derivabilitate ale lui h , adică cu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

18. [5 puncte] Mulțimea soluțiilor inecuației $27^x \leq 3^{x+4}$ este
- A. $(2, \infty)$
 - B. \emptyset
 - C. $[3, \infty)$
 - D. $(-\infty, 2]$**
 - E. $(-\infty, 3]$
 - F. Niciuna dintre variantele menționate mai sus

Soluție: Inecuația se scrie echivalent $3^{3x} \leq 3^{x+4}$, deci $3x \leq x+4$. Mulțimea soluțiilor este $(-\infty, 2]$.

19. [5 puncte] Valoarea integralei

$$\int_0^2 |x - 1| dx$$

este

- A. 2
- B. 0
- C. 1**
- D. $\frac{1}{2}$
- E. $\frac{3}{2}$
- F. 3

Soluție:

$$\int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_1^2 = 1.$$

20. [5 puncte] Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$. Valoarea expresiei $\sin x + \cos x$ este

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

D. 1

E. $\frac{3}{2}$

F. $\sqrt{2}$

Soluție: Avem

$$2 = (\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} + (\sin x + \cos x)^2,$$

de unde rezultă $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{7}{4}$. Deoarece $\sin x + \cos x > 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

se obține $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$.