Examen de admitere
Facultatea de Matematică şi Informatică
Proba scrisă – **Matematică**
iulie 2024

1. [4 puncte] Derivata funcţiei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ are, în fiecare punct $x > 0$, valoarea:

   A. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$

   B. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$

   C. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln x}{x^2}$

   D. $f'(x) = (x^{\frac{1}{x}}) \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$

   E. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}}$

   F. f nu este derivabilă pe $(0, \infty)$

Soluţie: Ținem seama de egalitatea $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot \ln x}$, valabilă pentru orice $x > 0$, și aplicăm regulile de derivare:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}\cdot \ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\cdot \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right)' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x) \cdot x'}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

2. [4 puncte] În reperul cartezian xOy se consideră dreapta de ecuaţie $d : 2x - y = 5$. Dreapta perpendiculară pe dreapta d în punctul $A(1, -3)$ are ecuaţia:

   A. $x + y = -2$

   B. $x + 2y = 5$

   C. $x + 2y = -5$

   D. $x - 2y = 7$

   E. $\frac{x}{2} + y = \frac{5}{2}$

   F. $\frac{-x}{2} + y = \frac{5}{2}$

Soluţie: O dreaptă perpendiculară pe dreapta d are ecuaţia $x + 2y = C$. Constanta C se determină punând condiţia ca punctul A să aparţină dreptei, de unde rezultă că punctul C are valoarea -5.

3. [5 puncte] Valoarea limitei $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)+5x^3-3x^2-3x}{x^2(x+1)^2}$ este:

A. 0

B. ∞

C. -3

D. 3

E. 1

F. nu există

Soluţie: Folosind proprietăţile limitelor, avem:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)+5x^3-3x^2-3x}{x^2(x+1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\left(5x-3-\frac{3x-\sin(3x)}{x^2}\right)=$$

$$=1\cdot\left(0-3-9\cdot\lim_{y\to 0}y\cdot\frac{y-\sin(y)}{y^3}\right)=-3-9\cdot 0\cdot\frac{1}{6}=-3.$$

(Am notat $y=3x$ şi am calculat, folosind regula lui l'Hôspital,

$$\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin(y)}{y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos(y)}{3y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{6y}=\frac{1}{6}.)$$

4. [5 puncte] Fie sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases}-3x+y+2z=5\\ x+2y-4z=-6\\ ax-3y+2z=1.\end{cases}$$

Care dintre afirmaţiile de mai jos este adevărată?

A. Sistemul este incompatibil pentru orice valoare a lui a

B. Sistemul este compatibil nedeterminat pentru orice $a\in\mathbb{R}$

C. Când sistemul este compatibil determinat, soluţia sa depinde de a

D. Există o valoare a pentru care sistemul este incompatibil

E. Sistemul este compatibil determinat pentru $a\neq 2$

F. Sistemul este compatibil determinat pentru orice $a>0$

Soluţie: Matricea sistemului este

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -4\\ a & -3 & 2\end{pmatrix}.$$

Calculând $\det(A)=8(2-a)$, se poate observa că sistemul este compatibil determinat pentru $a\neq 2$. Astfel, afirmaţia E este adevărată, iar A, B şi F sunt false. Pentru $a\neq 2$, soluţia sistemului este $x=0, y=1, z=2$, deci C este falsă, iar dacă $a=2$, sistemul este compatibil nedeterminat, soluţia acestuia fiind $y=\frac{5x}{4}+1, z=\frac{7x}{8}+2$, deci afirmaţia D este falsă.

5. [5 puncte] Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=x+\cos(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{n^2}$ este:

A. 0

B. ∞

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

E. $\frac{1}{4}$

F. nu există

Soluţie: Avem:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\\ &\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(1)+\cos(2)+\cdots+\cos(n)}{n^2}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}+0=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

deoarece

$$-\frac{1}{n}=\frac{-n}{n^2}<\frac{\cos(1)+\cos(2)+\cdots+\cos(n)}{n^2}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n},\qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

6. [5 puncte] Considerăm un punct M pe segmentul $[AB]$ de lungime 20 cm. Atunci cea mai mică valoare, în cm^2, a sumei ariilor cercurilor de diametre $[AM]$ și $[BM]$ este:

A. 200

B. 300

C. 40π

D. 50π

E. 60π

F. 70π

Soluţie: Soluția 1 Notăm lungimea segmentului $[AM]$ cu x. Atunci suma ariilor cercurilor este $\dfrac{\pi x^2}{4}+\dfrac{\pi(20-x)^2}{4}=\dfrac{\pi}{2}\big((x-10)^2+100\big)$ care are minimul 50π când $x=10$.

Soluția 2 Suma ariilor este $\dfrac{\pi}{4}\cdot(AM^2+BM^2)=\dfrac{\pi}{8}\cdot\big((AM+BM)^2+(AM-BM)^2\big)=\dfrac{\pi}{8}\cdot\big(AB^2+(AM-BM)^2\big)\geq\dfrac{\pi}{8}\cdot AB^2=50\pi\,cm^2$, cu egalitate dacă şi numai dacă $AM=BM=\frac{1}{2}\cdot AB=10\,cm$.

7. [4 puncte] Mulţimea soluţiilor din intervalul $[0,2\pi)$ ale ecuaţiei $\sin(2x)+\sin(x)=0$ este:

A. $x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$

B. $x\in\left\{0,\frac{\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3}\right\}$

C. $x\in\left\{0,\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3}\right\}$

D. $x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}$

E. $x\in\left\{0,\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\right\}$

F. $x\in\left\{0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

Soluţie: Deoarece $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, ecuația devine:

$$2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x)(2\cos(x) + 1) = 0.$$

Avem două cazuri:
Cazul 1: $\sin(x) = 0$, deci $x \in \{0, \pi\}$, sau
Cazul 2: $2\cos(x) + 1 = 0$, sau echivalent $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, deci $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

8. [5 puncte] Mulțimea soluțiilor inecuației $2e^{2x} - 5e^x + 2 \leq 0$ este:

A. $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

B. $[0, 2]$

C. $[0, \ln(2)]$

D. $[-\ln(2), \ln(2)]$

E. $(-\infty, \ln(2)] \cup [2, \infty)$

F. $[0, \ln(2)] \cup [2, \infty)$

Soluţie: Rescriem inecuația sub forma unei inecuații de gradul al doilea în raport cu $y = e^x$:

$$2y^2 - 5y + 2 \leq 0 \Longleftrightarrow (y - 2)(2y - 1) \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 2.$$

Revenim la x şi folosim monotonia funcţiei logaritmice:

$$\frac{1}{2} \leq e^x \leq 2 \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq x \leq \ln(2) \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln(2) \leq x \leq \ln(2).$$

9. [4 puncte] Mulțimea tuturor numerelor complexe $z \in \mathbb{C}$ care verifică egalitatea

$$|z + 2i|^2 + |z - 2i|^2 = 2|z|^2 + 8$$

este:

A. $\mathbb{C}$

B. {1}

C. {0, 1, i}

D. $\emptyset$

E. {2i, -2i}

F. {1, -1, 2i, -2i}

Soluţie: Soluția 1 Considerăm $z = a + ib$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$|z + 2i|^2 = |a + i(b + 2)|^2 = a^2 + (b + 2)^2$$
$$|z - 2i|^2 = |a + i(b - 2)|^2 = a^2 + (b - 2)^2$$
$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Substituind în egalitate, obținem:

$$a^2 + (b + 2)^2 + a^2 + (b - 2)^2 = 2(a^2 + b^2) + 8$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + 4b + 4 + a^2 + b^2 - 4b + 4 = 2a^2 + 2b^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 + 8 = 2a^2 + 2b^2 + 8,$$

ceea ce reprezintă o identitate adevărată pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

În concluzie, egalitatea este verificată pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Soluția 2 Cu identitatea paralelogramului $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$, valabilă pentru toate numerele complexe z şi w, înlocuind $w = 2i$, obţinem că egalitatea din enunţ are loc pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

10. [4 puncte] Fie $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Dacă $\text{rang}(AB) = 1$, atunci $\dfrac{a}{b}$ este egal cu:

A. 4

B. -4

C. -1

D. 1

E. -3

F. 3

Soluţie: Prin calcul direct se obţine $AB = \begin{pmatrix} a-b & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Cum $\text{rang}(AB) = 1$, trebuie ca $\det(AB) = 0$, adică $3(a-b) - 2a = 0$ şi asftel $\dfrac{a}{b} = 3$.

11. [5 puncte] Numărul matricelor $A \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$ pentru care suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $AA^\top$ este egală cu 3, este:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

F. 6

Observaţie: $A^\top$ reprezintă transpusa matricei A.

Soluţie: Pentru $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$ avem $AA^\top = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$. Cum ecuaţia $a^2+b^2+c^2+d^2 = 3$, cu $a, b, c, d \in \{0,1\}$, are 4 soluţii (a, b, c, d), numărul de matrice cu proprietatea cerută este 4.

12. [4 puncte] Valoarea integralei $\int_0^2 [x]\{x\}\,dx$ este:

A. 1

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{1}{2}$

F. 2

Observaţie: $[x]$, $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

Soluţie: Folosind eventual identitatea $\{x\} = x - [x], x \in \mathbb{R}$, obținem:

$$\int_0^2 [x]\{x\}\,dx = \int_0^1 0 \cdot x\,dx + \int_1^2 1 \cdot (x-1)\,dx = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

13. [5 puncte] Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de grad 4 cu proprietatea că funcţia polinomială asociată are valorile $P(0) = P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$ şi $P(4) = 16$. Atunci $P(-1)$ este

A. $P(-1) = 0$

B. $P(-1) = 2$

C. $P(-1) = 4$

D. $P(-1) = 6$

E. $P(-1) = 8$

F. $P(-1) = 10$

Soluţie: Mulţimea zerourilor polinomului $R = P - X^2$ este $Z(R) = \{1,2,3,4\}$. Deducem că există un număr raţional r cu proprietatea că $R = r(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$. Cum $R(0) = 1$, obţinem că $r = \frac{1}{24}$. Atunci

$$P(-1) = (-1)^2 + R(-1) = 1 + \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{24} = 1 + 5 = 6.$$

14. [5 puncte] Numărul soluţiilor $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ale sistemului

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 6 \end{cases}$$

este:

A. 0

B. 2

C. 4

D. 6

E. 3

F. 1

Soluţie: Dacă (x,y,z) este o soluţie a sistemului, atunci

$$xy+xz+yz=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)=-3$$

şi

$$xyz=\frac{1}{3}\left((x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)\cdot(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\right)=2\,.$$

Folosind relaţiile lui Viète obţinem că polinomul $P=(t-x)(t-y)(t-z)\in\mathbb{R}[t]$ poate fi rescris sub forma $P=t^3-3t-2$. Rădăcinile acestui polinom fiind $t_1=t_2=-1$ şi $t_3=2$, obţinem că mulţimea soluţiilor sistemului dat este $\mathcal{S}=\{(-1,-1,2),(-1,2,-1),(2,-1,-1)\}$. Numărul soluţiilor este deci 3.

15. [4 puncte] Dacă $\mathcal{N}=\left\{\begin{pmatrix} a & a\\ a & a\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}\right\}$, elementul neutru $E\in\mathcal{N}$ pentru operaţia obişnuită de înmulţire a matricelor pe mulţimea $\mathcal{N}$ este:

A. $E=O_{2\times 2}$

B. $E=I_2$

C. $E=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

D. $E=e\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

E. $E=\pi\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

F. $E=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Soluţie: Se verifică imediat că dacă $X(a)=\begin{pmatrix} a & a\\ a & a\end{pmatrix}$, atunci $X(a)\cdot X(b)=X(2ab)$. Elementul neutru este deci $E=X\left(\frac{1}{2}\right)$.

16. [4 puncte] Derivata funcţiei $f:\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}$ are, în fiecare punct $x>\frac{1}{2}$, valoarea:

A. $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$

B. $f'(x)=\frac{2x-1}{x^2\sqrt{2x-1}}$

C. $f'(x)=\frac{x-1}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}$

D. $f'(x)=\frac{x-1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}$

E. $f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2x}$

F. $f'(x)=\frac{x+1}{2\sqrt{2x-1}}$

Soluţie: Aplicând regulile de derivare, obţinem:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}}\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)'=\frac{x-1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}},\quad x>\frac{1}{2}.$$

17. [5 puncte] Valoarea integralei $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ este:

A. $e - 1 + \ln\frac{1}{1+e}$

B. $e - 1 - \ln\frac{2}{1+e}$

C. $e + 1 + \ln\frac{1}{1+e}$

D. $e + 1 + \ln\frac{2}{1+e}$

E. $e - 1 + \ln\frac{2}{1+e}$

F. $e - 1 - \ln\frac{2}{1-e}$

Soluţie: Notăm cu f funcția de sub semnul integral. Se consideră funcția $\varphi : [2, 1+e] \to [0,1], \varphi(u) = \ln(u-1)$. Folosim prima formulă de schimbare de variabilă și obţinem:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx &= \int_{\varphi(2)}^{\varphi(1+e)} f(x)dx = \int_2^{1+e} f(\varphi(u))\varphi'(u)du \\
&= \int\limits_2^{1+e} \frac{(u-1)^2}{u}\cdot\frac{1}{u-1}\,du = \int\limits_2^{1+e}\frac{u-1}{u}\,du \\
&= u\Big|_2^{1+e} - \ln u\Big|_2^{1+e} = e - 1 + \ln\frac{2}{1+e}.
\end{aligned}$$

18. [4 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm dreptele de ecuaţii $d_1 : 2x - y + 1 = 0$, $d_2 : 2x + y + 1 = 0$, $d_3 : 2x + y - 2 = 0$, $d_4 : 2x - y - 2 = 0$ şi $d_5 : 2x - y = 0$. Numărul total de puncte de intersecţie ale celor 5 drepte este:

A. 0

B. 2

C. 4

D. 5

E. 6

F. 10

Soluţie: Avem dreptele paralele $d_1 || d_4 || d_5$ şi $d_2 || d_3$. Cum d_2 intersectează d_1, d_4, d_5 in 3 puncte, iar d_3 intersectează d_1, d_4, d_5 in 3 puncte, numărul punctelor de intersecţie este $2 \times 3 = 6$.

19. [5 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele $A(-2,1)$, $B(1,3)$, $C(2,2)$ şi $D(-3,2)$. Câte din următoarele afirmaţii sunt adevărate?

(i) $ABCD$ este paralelogram;

(ii) $ACBD$ este paralelogram;

(iii) Triunghiurile ABC si ACD au aceeasi arie;

(iv) Dreptele AB si CD sunt paralele;

(v) Triunghiurile ABC si ABD au aceeasi arie.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5

Soluţie: Cum segmentele $[AB]$ si $[CD]$ au acelaşi mijloc, deducem că $ACBD$ este paralelogram, adică (ii). Rezultă că şi afirmaţiile (iii) şi (v) sunt adevărate. De asemenea, având pante diferite, dreptele AB şi CD nu sunt paralele. Prin urmare, (i) şi (iv) sunt false.

20. [4 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin relațiile $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ dacă $x \neq 1$ și $f(1) = 0$. Să se calculeze valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$.

A. 0

B. limita nu există

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

E. -$\frac{\pi}{2}$

F. niciuna dintre variantele menționate mai sus

Soluţie: Funcţia f este derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, cu derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Trecând la limită pentru $x \to 1$, obținem valoarea $\frac{1}{2}$.

Numărul total de puncte este: 90

FMI

Examen de admitere
Facultatea de Matematică şi Informatică
Proba scrisă – **Matematică**
septembrie 2024
Versiunea 1

1. [4 puncte] Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x+2}$, atunci $f'(2)$ este egală cu:
   - A. 0
   - B. $\frac{1}{3}$
   - C. $\frac{e}{2}$
   - **D.** -1
   - E. $-\frac{1}{e}$
   - F. $\frac{1}{2}$

Soluţie: Deoarece $f'(x) = (1-x)e^{-x+2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f'(2) = -1$.

2. [5 puncte] Dacă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+1}$, atunci valoarea integralei $\int_0^1 f'(x)e^{2f(x)}dx$ este:
   - A. $\frac{e^2(e^2-1)}{2}$
   - B. $\frac{1}{2}$
   - C. $\frac{e}{2}$
   - **D.** 0
   - E. -1
   - F. $\frac{e^2-e}{2}$

Soluţie: Avem:

$$\int_0^1 f'(x)e^{2f(x)}dx = \frac{1}{2}e^{2f(x)}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\big(e^{2f(1)} - e^{2f(0)}\big).$$

Deoarece $f(0) = f(1) = 2$, rezultă că valoarea cerută este egală cu 0.

3. [4 puncte] Pe mulţimea numerelor reale, $\mathbb{R}$, definim legea de compoziţie asociativă $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$, $x, y \in \mathbb{R}$. Simetricul elementului $x = 3$ faţă de această lege este:

A. elementul $x = 3$ nu este simetrizabil

B. 2

C. $\frac{7}{3}$

D. 1

E. $\frac{5}{7}$

F. $\frac{2}{3}$

> **Soluţie:** Se obţine că $e = 1$ este element neutru al acestei legi de compoziţie, iar dacă x' ar fi simetricul lui x egalitatea $x \circ x' = 1$ arată că x' există şi $x' = \frac{5}{7}$.

4. [5 puncte] Pentru $a \in \mathbb{C}$, considerăm matricele $A(a) = \begin{pmatrix} 2+a & 5 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$. Suma elementelor mulţimii $M = \{a \in \mathbb{C} : A(a) \text{ nu este inversabilă } \}$ este:

A. 5

B. 1

C. 2

D. 12

E. 7

F. -2

> **Soluţie:** Matricea $A(a)$ nu este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A(a)) = 0$ ceea ce este echivalent cu $a^2 + 2a + 5 = 0$. Mulţimea M este deci mulţimea soluţiilor (complexe) ale acestei ecuaţii şi atunci, conform relaţiilor lui Viéte, suma cerută este egală cu -2.

5. [4 puncte] Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $\log_3(3x) + \log_{x^2} 9 = \frac{7}{2}$ este

A. 53

B. 30

C. 21

D. $3 + \sqrt{3}$

E. $9\sqrt{3} + 3$

F. 84

> **Soluţie:** În condiţiile de existenţă ($x > 0$, $x \neq 1$) ecuaţia este echivalentă cu
>
> $$1 + \log_3 x + \frac{1}{2} \log_x 3^2 = \frac{7}{2},$$
>
> sau echivalent, $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} = 0$. Se obţine că $\log_3 x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, ceea ce conduce la faptul ca $x \in \{\sqrt{3}, 9\}$. Suma cerută este egală cu 84.

6. [4 puncte] Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $p = X^4 - X^2 + 4aX - b \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $x_1 = 1 - i \in \mathbb{C}$ este rădăcină a polinomului p, atunci restul împărţirii polinomului p la $X^2 - 2X + 2$ este egal cu

   A. $X - i$

   B. $2X - 1$

   C. $-i$

   D. 0

   E. X

   F. $X + 1$

Soluţie: Deoarece $p \in \mathbb{R}[X]$, iar $x_1 = 1 - i$ este rădăcină, rezultă că şi $x_2 = \overline{x_1} = 1 + i$ este tot o rădăcină a polinomului p. Atunci p se va divide prin $(X - .1 + i)(X - 1 - i) = X^2 - 2X + 2$, deci restul cerut este polinomul nul.

7. [5 puncte] Fie $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$, $F(x) = (a \sin x + b \cos x)e^x$. Perechea (a, b) de numere reale, pentru care funcţia F este o primitivă a funcţiei f este

   A. $(1, 0)$

   B. $(1, 1)$

   C. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

   D. $(1, -1)$

   E. $(-1, 1)$

   F. $\left((0, \frac{3}{2}\right)$

Soluţie: Funcţia F este derivabilă şi $F'(x) = \big((a - b)\sin x + (a + b)\cos x\big)e^x$. Rezultă că funcţia F va fi o primitivă a funcţiei f dacă şi numai dacă $\begin{cases} a - b &= 1 \\ a + b &= 0 \end{cases}$, sistem cu soluţia $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

8. [5 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele $A(-2, 1)$, $B(a, 3)$ şi respectiv $C(2, 2)$. Fie M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$. Suma numerelor reale a pentru care aria ΔMNP este egală cu 1 este:

   A. 8

   B. 1

   C. 2

   D. 0

   E. 12

   F. -3

Soluţie: Avem că $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} | = \frac{|a-6|}{2}$. Deoarece $\mathcal{A}_{\Delta MNP} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{\Delta ABC}$, rezultă că $|a - 6| = 8$ ceea ce este echivalent cu $a \in \{-2, 14\}$.

9. [5 puncte] Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci matricea A^{2024} este egală cu

A. $2024I_2$

B. $2^{1012}I_2$

C. I_2

D. $2024A - 2023I_2$

E. $2024(A - I_2)$

F. $2024A$

Soluţie: Avem că $A = I_2 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Deoarece $B \cdot I_2 = I_2 \cdot B$, iar $B^2 = O_2$, rezultă (conform formulei binomului lui Newton) că $A^n = \mathbf{C}_n^0 I_2 + \mathbf{C}_n^1 B = I_2 + nB = I_2 + n(A - I_2) = nA - (n-1)I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

O altă variantă posibilă de rezolvare este determinarea prin inducţie a formei matricei A^n.

10. [5 puncte] Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Câte din următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(i) $f'(e^2) = 1$;

(ii) Funcţia f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$;

(iii) Funcţia f este derivabilă pe $(0, \infty)$;

(iv) $x = e^2$ este punct de extrem local pentru funcţia f;

(v) Funcţia f are un unic punct de extrem local.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5

Soluţie: Funcţia f este raportul bine definit a două funcţii derivabile pe $(0, \infty)$ şi deci funcţia f este derivabilă pe intervalul $(0, \infty)$, iar $f'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$. Atunci $f'(e^2) = 0 \neq 1$. Rezultă că afirmaţia (i) este *falsă*, iar (iii) este *adevărată*.

Funcţia f' este pozitivă pe intervalul $(0, e^2)$ şi negativă pe intervalul (e^2, ∞) ceea ce arată că f nu este monotonă pe intervalul $(0, \infty)$, iar punctul critic $x = e^2$ este punct de maxim local, deci afirmaţia (ii) este *falsă*, iar afirmaţia (iv) este *adevărată*.

Funcţia f este derivabilă pe intervalul deschis $(0, \infty)$, iar unicul punct critic, $x_0 = e^2$, este punct de maxim local pentru f. Rezultă că afirmaţia (v) este *adevărată*.

11. [4 puncte] Suma $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2024}$, unde $i \in \mathbb{C}$ cu $i^2 = -1$, este egală cu:

A. 0

B. -1

C. 1

D. $-i$

E. i

F. 2024

Soluţie: Deoarece $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $2024 = 4 \cdot 506$, se obţine că că $S = 1$.

12. [5 puncte] În triunghiul ΔABC se ştie că $AB = 4$, $AC = 3\sqrt{3}$, iar $m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$. Distanţa de la vârful A la latura $[BC]$ este egală cu:

A. 6

B. $\frac{6\sqrt{3}}{7}$

C. $\frac{6\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$

E. $2\sqrt{2}$

F. 23

Soluţie: Avem că $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\hat{A})}{2} = 3\sqrt{3}$. Pe de alta parte $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{d(A, BC) \cdot BC}{2}$ şi deci $d(A, BC) = \frac{2\mathcal{A}_{\Delta ABC}}{BC}$. Din Teorema Cosinusului se obţine că $BC = \sqrt{7}$, ceea ce conduce la faptul că $d(A, BC) = \frac{6\sqrt{21}}{7}$.

13. [5 puncte] Distanţa de la punctul $A(2, 0)$ la mijlocul segmentului $[BC]$, cu $B(-1, 1)$ şi $C(5, -1)$, este:

A. 3

B. 1

C. -1

D. $\sqrt{2}$

E. 0

F. 4

Soluţie: Dacă M notează mijlocul segmentului $[BC]$ atunci $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 2$, iar $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 0$. Rezultă că $M = A$ şi deci distanţa cerută este egală cu 0.

14. [4 puncte] Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului $f = X^3 - X^2 + 3$, iar $a = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ şi $b = \frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{x_1 x_3}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3}$ atunci $a^2 - b^2 - ab$ este egal cu:

A. $\frac{5}{3}$

B. $-\frac{4}{3}$

C. 0

D. -4

E. 18

F. $\frac{15}{2}$

Soluţie: Conform relaţiilor lui Viéte $S_1 = x_1+x_2+x_3 = 1$, $S_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 0$, iar $S_3 = x_1x_2x_3 = -3$. Deoarece $a = \frac{S_2}{S_3} = 0$, iar $b = \frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2}{x_1x_2x_3} = \frac{S_2^2 - 2S_1S_3}{S_3} = -2$ se obţine că $a^2 - b^2 - ab = -4$.

15. [4 puncte] Valoarea limitei $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$ este:

A. $-\infty$

B. 2

C. 1

D. 0

E. -1

F. $\frac{1}{2}$

Soluţie:

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}} - 1} = -1.$$

16. [5 puncte] Valoarea numărului complex $a \in \mathbb{C}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} a-1 & 2-a \\ a & -a \end{pmatrix}$ este inversa matricei $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ este:

A. 5

B. 1

C. 2

D. -2

E. -1

F. 0

Soluţie: Matricea A este inversa matricei B dacă şi numai dacă $AB = I_2$, ceea ce este echivalent cu $\begin{pmatrix} 1 & -a-1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se obţine că $a = -1$.

17. [4 puncte] Aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -1$, respectiv $x = 2$, este:

A. 3

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

E. $\frac{11}{6}$

F. 2

Soluţie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\Gamma_f} &= \int_{-1}^{2} |x^2 - x|\, dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^2)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x)\, dx = \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = \\
&= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

18. [5 puncte] Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} (m+1)x + y + mz &= -5 \\ x - y - mz &= 10 \\ (2-m)x + y + z &= 1 - m \end{cases}$, a cărui matrice o notăm cu $A(m)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Considerăm proprietăţile:

(i) $\det(A(2)) = 4$;

(ii) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil;

(iii) Suma elementelor $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil este egală cu -1;

(iv) Valoarea numărului real m pentru care $(1, 3, -4)$ este soluţie a sistemului dat este $m = 3$;

(v) Există $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul dat admite două soluţii distincte.

Una din afirmaţiile de mai jos este adevărată. Care este aceasta?

A. Toate proprietăţile sunt adevărate.

B. Numai proprietăţile (i) şi (v) sunt adevărate.

C. Singura proprietate falsă este (ii).

D. Toate proprietăţile sunt false.

E. Singurele proprietăţi adevărate sunt (iii) şi (iv).

F. Numai proprietăţile (i), (iii) şi (iv) sunt adevărate.

Soluţie: Avem că $\det(A(m)) = (m+2)(m-1)$ şi deci $\det(A(2)) = 4$, ceea ce implică faptul că (i) este *adevărată*.

Pentru $m = -2$ avem un minor principal al sistemului pe $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ căruia îi corespunde minorul caracteristic $\Delta_c = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 10 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$, ceea ce arată că sistemul este incompatibil, deci proprietatea (ii) este *falsă*

Analog ca mai sus se arată că şi pentru $m = 1$ sistemul este incompatibil şi cum pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ avem că sistemul este de tip Cramer (deci compatibil) rezultă că singurele valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil sunt $m = -2$ şi $m = 1$. Rezultă că proprietatea (iii) este *adevărată*.

Tripletul $(1, 3, -4)$ este soluţie a sistemului dat dacă şi numai dacă sunt verificate simultan egalităţile $m + 1 + 3 - 4m = -5$, $1 - 3 + 4m = 10$, respectiv $2 - m + 3 - 4 = 1 - m$, ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă $m = 3$, deci proprietatea (iv) este *adevărată*.

Sistemul admite două soluţii distincte dacă şi numai dacă este compatibil nedeterminat. Din cele de mai sus rezultă că sistemul dat este fie compatibil determinat, fie incompatibil. Deci, proprietatea (v) este *falsă*.

19. [4 puncte] Valoarea numărului $m \in \mathbb{R}$, pentru care dreptele $d_1 : (m+1)x - 2y + 3 = 0$ şi respectiv $d_2 : 3x + y - 1 = 0$ sunt paralele, este:

A. -7

B. $\frac{3}{7}$

C. 0

D. 2024

E. $\sqrt{2}$

F. 23

Soluţie: Dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă, deci $\frac{m+1}{2} = -3$, ceea ce este echivalent cu $m = -7$.

20. [4 puncte] Integrala nedefinită a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$ este:

A. $\int f(x)\,dx = x \cos x + \mathcal{C}$

B. $\int f(x)\,dx = -x \cos x + \mathcal{C}$

C. $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} \sin x - x \cos x + \mathcal{C}$

D. $\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} \sin x + x \cos x + \mathcal{C}$

E. $\int f(x)\,dx = -x \cos x + \sin x + \mathcal{C}$

F. $\int f(x)\,dx = -x \cos x - \sin x + \mathcal{C}$

Soluţie: Conform formulei de integrare prin părţi, vom avea:

$$\int f(x)\,dx = -\int x(\cos x)'dx = -x \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cos x + \sin x + \mathcal{C}.$$

Numărul total de puncte este: 90